Inspectoratul Scolar Judetean Gorj

OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A -IX-A

15 februarie 2015

1. a) Demonstrați că $3^{n-1} > 2^n - 1, \forall n \in N^*, n \geq 3$;
   b) Să se determine numărul natural n pentru care
   $a^n + b^n + c^n + (a+b+c)^n = (a+b)^n + (b+c)^n + (a+c)^n$,
   oricare ar fi $a, b, c \in (0, \infty)$. G.M.

2. Rezolvați în N ecuația $\left[\sqrt{n^2 + 4n + 9}\right] = 3n - 4$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică ai cărei termeni sunt numere naturale. Dacă progresia are un termen egal cu 1936, arătați că ea conține o infinitate de termeni care sunt pătrate perfecte. B.M.

4. Fie ABC un triunghi, $M \in (AB)$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ și $N \in (AC)$ astfel încât $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Notăm cu P mijlocul lui (BC) și cu R punctul de intersecție al dreptelor AP și MN. Dacă $\overrightarrow{AR} = k \cdot \overrightarrow{AP}$ determinați valoarea lui k.

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează cu 7p.